UN TEOREMA SULLE SOSTITUZIONI

Nota del prof. F. Giudice, a Palermo.

(Seduta del 19 dicembre 1886)

TEOREMA (*). — *Se due gruppi G ed H degli ordini μ e ν sono permutabili fra loro ed il gruppo L delle loro sostituzioni comuni è dell'ordine ε, l'ordine del gruppo minimo contenente G ed H come sottogruppi è* $\frac{\mu \times \nu}{\varepsilon}$.

Infatti: Sia $G = [1, g_2, g_3, \ldots, g_\mu]$ $H = [1, h_2, h_3, \ldots, h_\nu]$

$$L = [1, l_2, l_3, \ldots, l_\varepsilon].$$

Perchè G ed H sono permutabili, il gruppo minimo di cui i medesimi sono sottogruppi contiene tutte, e solamente, le diverse sostituzioni del quadro

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} 1 \quad g_2 \quad g_3 \ldots\ldots\ldots g_\mu \\ h_2 \quad g_2h_2 \quad g_3h_2 \ldots\ldots\ldots g_\mu h_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_\nu \quad g_2h_\nu \quad g_3h_\nu \ldots\ldots\ldots g_\mu h_\nu \end{array} \right.$$

(*) Questo teorema si trova dimostrato pel caso particolare $\varepsilon = 1$. Vedi ad esempio: E. Netto, Teoria delle sostituzioni, §§ 38 e 78; A. Capelli e G. Garbieri, Analisi Algebrica, §§ 260 e 261.

Ora perchè si abbia

$$gh = g'h'$$

è necessario e sufficente che $g'^{-1} \times g$, ossia $h' \times h^{-1}$, sia una sostituzione l di L, epperò

$$g' = g \times l^{-1}, \qquad h' = l \times h.$$

Segue che ogni gh è eguale alle altre $\varepsilon - 1$ sostituzioni

$$(gl_2^{-1})(l_2\ h),\ (gl_3^{-1})(l_3\ h),\ \ldots,\ (gl_\varepsilon^{-1})(l_\varepsilon h)$$

ed a queste soltanto.

Adunque : Le sostituzioni diverse del quadro (1) sono precisamente $\frac{\mu \times \nu}{\varepsilon}$; ed è questo l'ordine del gruppo (G, H)

Corollario I. — Se G ed H degli ordini μ e ν sono permutabili ed il gruppo (G, H) è dell'ordine λ, quelli hanno $\frac{\mu \times \nu}{\lambda}$ sostituzioni comuni.

Corollario II. — Se G ed H degli ordini μ e ν hanno ε sostituzioni comuni e l'ordine di (G, H) è $\frac{\mu \times \nu}{\varepsilon}$, i gruppi G ed H sono permutabili.